COLEGIUL NAŢIONAL
„VASILE LUCACIU"
BAIA MARE

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

Concursul "PRIN LABIRINTUL MATEMATICII"
ediţia a XII-a, Baia Mare, 25 noiembrie 2017

CLASA a XI-a

Subiectul 1.

Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ și șirurile $(a_n)_{n\geq 2}$, $(b_n)_{n\geq 2}$, $(c_n)_{n\geq 2}$, unde

$$a_n = C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \cdots;\quad b_n = C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \cdots;\quad c_n = C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \cdots;$$

a) Calculaţi A^n, pentru orice $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$.

b) Arătaţi că $a_n^3 + b_n^3 + c_n^3 - 3a_nb_nc_n = 2^n$ pentru orice $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$.

Subiectul 2.

Fie $A, B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $6A^2 = B^2$ și $5AB + I_n = 4BA$. Arătați că $AB = BA$.

Subiectul 3.

Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_n = \begin{cases}1, \text{dacă } n \text{ este pătrat perfect}\\ 0, \quad\quad\quad\quad\quad\quad \text{în rest}\end{cases}$

și $s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ pentru orice $n\in\mathbb{N}, n\geq 1$.

a) Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{s_n}{n} = 0$.

b) Studiaţi convergenţa şirului $\left(\frac{s_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$.

Subiectul 4.

Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere reale cu $a_1 = 4$ și $3\cdot a_{n+1} = (a_n+1)^3 - 5$, $n\geq 1$. Calculați

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k - 1}{a_k^2 + a_k + 1}.$$

Notă:

1) Timp de lucru 3 h.
2) Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poştal 430282
Telefon şi fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630
Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro

Concursul “PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediţia a XII-a, Baia Mare, 25 noiembrie 2017

CLASA a XI-a

Subiectul 1. Se consideră matricea A=$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ și șirurile $(a_n)_{n\geq 2}, (b_n)_{n\geq 2}, (c_n)_{n\geq 2}$ unde

$$a_n = C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \cdots ; \quad b_n = C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \cdots ; \quad c_n = C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \cdots ;$$

a) Să se calculeze A^n, pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
b) Să se arate că $a_n^3 + b_n^3 + c_n^3 - 3a_nb_nc_n = 2^n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Soluţie: a) A=$I_3 + E$, unde $E = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}, E^2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}, E^3 = I_3$ **2p**

$A^n = (I_3 + E)^n = C_n^0 I_3 + C_n^1 E + C_n^2 E^2 + \cdots + C_n^n E^n = a_n I_3 + b_n E + c_n E^2$ **2p**

b) $\det(A^n) = (detA)^n = 2^n$ **1p**

$\det(A^n) = \begin{vmatrix}a_n & b_n & c_n\\ c_n & a_n & b_n\\ b_n & c_n & a_n\end{vmatrix} = a_n^3 + b_n^3 + c_n^3 - 3a_nb_nc_n \Rightarrow a_n^3 + b_n^3 + c_n^3 - 3a_nb_nc_n = 2^n$ **2p**

Subiectul 2. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $6A^2 = B^2$ și $5AB + I_n = 4BA$. Arătați că $AB = BA$.
Soluţie:
Din $5AB + I_n = 4BA$, pe de o parte se obține $AB = \frac{4}{5}BA - \frac{1}{5}I_n$, **1 punct**
iar pe de altă parte avem $5AB^2 + B = 4BAB$.
Atunci **1 punct**

$$5AB^2 + B = 4B\left(\frac{4}{5}BA - \frac{1}{5}I_n\right) \Rightarrow 25AB^2 + 9B = 16B^2A$$

Cum $6A^2 = B^2 \Rightarrow 6A^3 = B^2A = AB^2$, **2 puncte**
din egalitatea de mai sus, se deduce că $9(B^2A - B) = O_n$, deci **1 punct**

$$B^2A = B = 6A^3$$

Atunci **2 puncte**

$$6A^4 = AB = BA.$$

Subiectul 3. Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_n = \begin{cases}1, & \text{dacă n este pătrat perfect}\\ 0, & \text{în rest}\end{cases}$
și $s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.
a) Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_n}{n} = 0$.
b) Studiați convergența șirului $\frac{s_n}{\sqrt{n}}$

Soluţie:a) $s_n = k, \forall n \in \{k^2, k^2+1, \dots, (k+1)^2 - 1\} \Rightarrow s_n = [\sqrt{n}], \forall n \in \mathbb{N}^*$ **3p**

$0 \leq \frac{s_n}{n} = \frac{[\sqrt{n}]}{n} \leq \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_n}{n} = 0$ **2p**

b) $\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}} < \frac{s_n}{\sqrt{n}} = \frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_n}{\sqrt{n}} = 1$ **2p**

Subiectul 4.

Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere reale cu $a_1 = 4$ și $3 \cdot a_{n+1} = (a_n + 1)^3 - 5,\ \ n \geq 1$. Calculați

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k - 1}{a_k^2 + a_k + 1}$$

Soluție

Avem $a_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(a_n + 1)^3 - 5}{3} - a_n = \frac{1}{3}(a_n + 2)^2(a_n - 1) > 0$$

deci șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este crescător. **1p**

Dacă șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent, atunci $\exists l \in \mathbb{R}$, cu $4 < l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Rezultă $3l = (l + 1)^3 - 5$, ceea ce implică $l \in \{1, -2\}$, imposibil.

Deci șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este crescător, nemărginit, adică

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. **2p**

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem

$$\frac{a_n - 1}{a_n^2 + a_n + 1} = \frac{3(a_{n+1} - a_n)}{(a_n + 2)^2(a_n^2 + a_n + 1)} = \frac{3(a_{n+1} - a_n)}{(a_n + 2)((a_n + 1)^3 + 1)} = \frac{3(a_{n+1} - a_n)}{(a_n + 2)(3a_{n+1} + 6)}$$

$$\frac{a_n - 1}{a_n^2 + a_n + 1} = \frac{a_{n+1} - a_n}{(a_n + 2)(a_{n+1} + 2)} = \frac{1}{a_n + 2} - \frac{1}{a_{n+1} + 2}, \forall\, n \geq 1.$$ **2p**

Atunci

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k - 1}{a_k^2 + a_k + 1} = \frac{1}{a_1 + 2} - \frac{1}{a_{n+1} + 2} = \frac{1}{6} - \frac{1}{a_{n+1} + 2}.$$ **1p**

Rezultă

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k - 1}{a_k^2 + a_k + 1} = \frac{1}{6}.$$ **1p**